DS3 VERSION A CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Barème et exigences

Exercice 1 : 44 points.

1. **a.** 2 points.
   b. 3 points, attention, contrairement à d'habitude, le texte nous impose de traiter déjà le cas de l'image, puis d'en déduire la dimension du noyau avec le théorème du rang. 2 points pour l'image, et 1 point pour le noyau (il suffit alors simplement d'appliquer le théorème du rang).
   c. 3 points, 2 points pour la résolution du système, puis 1 point pour constater qu'on vient de montrer que 0 est valeur propre et que son espace propre est constitué des solutions du système.
   d. 4 points, c'est en général une question difficile mais le système est ici très simple à résoudre. 2 points pour les deux valeurs propres, 2 points pour les espaces propres associés.
   e. 1 point, il suffit de citer le cours.
2. **a.** 1 point, il suffit de dire que P est une matrice de passage.
   b. 2 points.
   c. 2 points, très classique.
   d. 2 points.
3. 2 points, pour le nom de la loi avec les paramètres, le support et les expressions de $P(X_1 = k)$ pour $k \in X_1(\Omega)$. -1 point à chaque oubli.
4. 4 points, 2 par ligne à compléter.
5. **a.** 3 points, 1 par indice j.
   b. 3 points, 1 pour chaque utilisation de le formule des probas totales.
   c. 2 points, attention l'initialisation est plus délicate que l'hérédité.
   d. 2 points pour la formule du binôme, 0 si la commutativité n'est pas évoquée.
   e. 3 points, 2 pour la 1ère colonne de A^k, 1 pour la conclusion sur la loi.
   f. 2 points.
   g. 3 points, il suffit de définir la fonction de k obtenue précédemment.

Exercice 2 : 31 points.

1. 1 point, question de cours.
2. 2 points, 1 pour donner la condition selon laquelle il se passe quelque chose, et 1 pour dire ce qu'il se passe dans ce cas.
3. 3 points, 1 par ligne.
4. 3 point, 2 points pour le programme, 1 pour la comparaison avec l'espérance de T_2, les cubes doivent citer la loi faible des grands nombres, pour les carrés, une explication vague suffit.
5. 1 point, aucune justification n'est demandée.
6. **a.** 1 point, aucune justification n'est demandée.
   b. 2 points, 1 pour citer l'indépendance quand il faut, 1 pour conclure.

- **c.** 3 points, 1 pour dire que les $\mathbb{P}((T_2 = k) \cap (X_1 = i))$ pour $i = 2, 3$ se calculent pareil, 1 pour utiliser correctement la formule des probas totales (et la citer), 1 pour conclure.

7. 2 points, calcul simple. -1 si on parle de la somme infinie avant d'avoir justifié de son existence.

8. 3 points, 1 pour la loi, 1 pour l'espérance de T_2, 1 pour sa variance.

9. **a.** 1 point, c'est la modélisation.

- **b.** 3 points, 1 pour l'espérance, 1 pour la variance (questions de cours), 1 pour la vérification pour $i = 1$.

10. 1 point, la réponse est contenue dans la question.

11. **a.** 1 point, c'est l'indépendance.

- **b.** 2 points, calcul classique qui utilise la formule des probas totales.
- **c.** 1 point, question de conclusion puisque $T_3 = 1 + Z_2 + Z_3$.

12. 1 point, c'est la linéarité de l'espérance.

13. 2 points, question difficile.

Exercice 3 : 19 points.

1. **a.** 1 point, c'est du cours, il suffit de dire que la matrice est triangulaire.

- **b.** 2 points, très classique.

2. **a.** 1 point, c'est la même question que la **1.a**

- **b.** 3 points, 1 pour chaque calcul. 1 pour la conclusion en disant que les vecteurs sont non nuls.
- **c.** 2 points, 1 pour base, on peut soit citer le cours (concaténation), soit dire que les vecteurs ne sont pas colinéaires. 1 point pour l'expression de la matrice, aucun commentaire n'est demandé.
- **d.** 3 points, 1 pour D, 1 pour la formule de changement de base (ou le calcul de AP et PD) et 1 pour constater que A est semblable à une matrice diagonale.

3. **a.** 2 points, on attend la FPT, le bon SCE et la conclusion.

- **b.** 2 points, 1 pour la loi, 1 pour la fin du calcul.

4. **a.** 1 point, question récapitulative.

- **b.** 2 points.

Orthographe, présentation, lisibilité : 7 points.

Total : 101 points. divisés par 4 pour faire une note sur 20.

Erreurs fréquentes / Commentaires généraux

Correction détaillée

Correction 1

Partie I

1. **a.** On a

- $f(e_1) = 0\ e_1 + \dfrac{1}{3}e_2 + \dfrac{1}{3}e_3$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
- $f(e_2) = f(e_3) = \dfrac{2}{3}e_1 + 0\ e_2 + 0\ e_3$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_2)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_3)) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On en déduit par concaténation que $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

b. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(f) &= \operatorname{rg}(M) && \textit{(car } M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\textit{)} \\ &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= 2 && \textit{(car les deux lignes sont non colinéaires)} \end{aligned}$$

D'où

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rg}(f) = 2.$$

D'après le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f)$. Donc

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1.$$

c. On remarque que $f(e_2) = f(e_3)$ donc $f(e_2 - e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ par linéarité. Ainsi : $e_2 - e_3 \in \operatorname{Ker}(f)$. De plus, la famille $\mathcal{F}_0 = (e_2 - e_3)$:

- est libre car constituée d'un unique vecteur non nul
- vérifie $\operatorname{Card}(\mathcal{F}_0) = 1 = \dim(\operatorname{Ker}(f))$

On en déduit que $\mathcal{F}_0$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Ainsi, par passerelle matrice-endomorphisme : 0 est valeur propre de M et $E_0(M) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d. En s'inspirant de la matrice P ci-dessous, on remarque que :

- $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Puisque $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, on en déduit que $\frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{3}$ sont des valeurs propres de M.

Finalement, on a montré que 0, $\frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{3}$ sont des valeurs propres de M et comme $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice M ne peut pas avoir plus de 3 valeurs propres distinctes. Donc

$$\operatorname{Sp}(M) = \{-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\}.$$

On sait que

$$\dim(E_{-\frac{2}{3}}(M)) + \dim(E_0(M)) + \dim(E_{\frac{2}{3}}(M)) \leqslant 3$$

car $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Or, ces trois nombres sont des entiers non nuls, donc ils sont nécessairement tous égaux à 1 :

$$\dim(E_{-\frac{2}{3}}(M)) = \dim(E_0(M)) = \dim(E_{\frac{2}{3}}(M)) = 1.$$

On en déduit, d'après les calculs précédents et par argument de dimension, que :

$$E_{-\frac{2}{3}}(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_{\frac{2}{3}}(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e. D'après la question précédente :

$$\dim(E_{-\frac{2}{3}}(M)) + \dim(E_0(M)) + \dim(E_{\frac{2}{3}}(M)) = 1 + 1 + 1 = 3$$

2. a. La matrice P est obtenue par concaténation des trois vecteurs propres trouvés précédemment, associés à trois valeurs propres distinctes de M. Ces trois vecteurs propres forment donc une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, de cardinal $3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Notons $\mathbb{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ cette base. On a alors

$$\boxed{P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{ donc } P \text{ est inversible.}}$$

D'après la formule de changement de base :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donc $PQ = 4I$ donc $P\left(\frac{1}{4}Q\right) = I$. D'où

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}Q}$$

c. Montrons par récurrence que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(j)$ est vraie où $\mathcal{P}(j)$: $M^j = PD^jP^{-1}$.

- **Initialisation** : D'une part $M^0 = I$. D'autre part $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(j)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} M^{j+1} &= M \times M^j \\ &= M \times PD^jP^{-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PDP^{-1} \times PD^jP^{-1} \quad \text{d'après la question } \mathbf{3.a)} \\ &= PDPP^{-1}D^jP^{-1} \\ &= PD \times D^jP^{-1} \\ &= PD^{j+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie.

Le principe de récurrence nous assure que

$$\boxed{\text{pour tout } j \in \mathbb{N},\ M^j = PD^jP^{-1}.}$$

d. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

$$M^j = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^j & 0 & 0\\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^j & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & * & *\\ -1 & * & *\\ 0 & * & *\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)^j & * & *\\ -\left(-\frac{2}{3}\right)^j & * & *\\ 0 & * & *\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j & * & *\\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j & * & *\\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j & * & *\end{pmatrix}$$

Ainsi, la première colonne de M^j est

$$\boxed{\begin{pmatrix}\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^j + \left(-\frac{2}{3}\right)^j}{2}\\ \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j}{4}\\ \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^j - (-23)^j}{4}\end{pmatrix}}$$

Pour $j = 0$, on a

- D'une part, $M^0 = I$ donc la première colonne de M^0 est $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.
- D'autre part, $\begin{pmatrix}\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(-\frac{2}{3}\right)^0}{2}\\ \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \left(-\frac{2}{3}\right)^0}{4}\\ \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \left(-\frac{2}{3}\right)^0}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Donc la formule reste valable pour $j = 0$.

Partie II

Étudions sur un exemple les différents objets définis dans l'énoncé.
L'expérience consiste à effectuer des tirages successifs avec remise dans une urne contenant 3 boules numérotées de 1 à 3. Les résultats possibles de l'expérience sont donc des ∞-tirages.
Considérons l'∞-tirage $\omega = (2, 3, 3, \ldots)$.
(on ne décrit ici que les premières étapes)

- Les numéros des boules piochées dans l'urne ont donc été successivement : 2, puis 1, puis 3.
- Comme la première boule piochée porte le numéro 2, alors, d'après l'énoncé, X_1 prend cette valeur 2.
- La valeur de X_1 est 2, différente de 1. Deux cas se présentent alors :
  - si la boule piochée au 2ème tirage vaut également 2, alors X_2 prendra la valeur 2,
  - si la boule piochée au 2ème tirage est de numéro distinct de 2, alors X_2 prendra la valeur 1.

  La deuxième boule piochée porte le numéro $3 \neq 2$. On en déduit que X_2 prend la valeur 1.
- La variable X_2 prend la valeur 1 et la troisième boule piochée porte le numéro 3. On en déduit que la variable X_3 prend la valeur 3.
- Finalement, le 3-tirage $(2, 3, 3)$ réalise l'événement $[X_1 = 2] \cap [X_2 = 1] \cap [X_3 = 3]$.

La difficulté de cet exercice réside dans la potentielle confusion des différents niveaux d'étude de cette expérience :

- celui des ∞-tirages ($\omega \in \Omega$),
- celui des variables aléatoires (X_1, X_2, X_3, $\ldots$),
- celui des événements.

3.
- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi 3 issues numérotées de 1 à 3.
- La variable X_1 correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket).}$$

4.

```
k = int(input('Entrez un nombre k superieur a 2 : '))
X = rd.randint(1,4)
for i in range(k-1):
    tirage = rd.randint(1,4)
    if X == 1:
      X = tirages
      else:
    if tirage != X:
        X = 1
print(X)
```

5. a.

- Si l'événement $[X_k = 1]$ est réalisé, c'est que, après le $k^{\text{ème}}$ tirage, la variable X_k prend la valeur 1.
  On procède alors au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage : on pioche au hasard parmi les 3 boules de l'urne (numérotées de 1 à 3). La variable X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce tirage.

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } i \in \{1, 2, 3\} : \ \mathbb{P}_{[X_k=1]}([X_{k+1} = i]) = \frac{1}{3}.}$$

- Si l'événement $[X_k = 2]$ est réalisé, c'est que la variable X_k prend la valeur 2, différente de 1. On procède alors au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage :
  - l'événement $[X_{k+1} = 1]$ est réalisé si et seulement si la variable X_{k+1} prend la valeur 1, c'est-à-dire si on a tiré une boule de numéro différent de 2 lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage (donc de numéro 1 ou 3).

$$\boxed{\text{Le tirage étant effectué de manière équiprobable : } \mathbb{P}_{[X_k=2]}([X_{k+1} = 1]) = \frac{2}{3}.}$$

  - l'événement $[X_{k+1} = 2]$ est réalisé si et seulement si la variable X_{k+1} prend la valeur 2, c'est-à-dire si on a tiré la boule numéro 2 lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}_{[X_k=2]}([X_{k+1} = 2]) = \frac{1}{3}.}$$

  - l'événement $[X_{k+1} = 3]$ si et seulement si la variable X_{k+1} prend la valeur 3. Il n'est donc jamais réalisé.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}_{[X_k=2]}([X_{k+1} = 3]) = 0.}$$

- Si l'événement $[X_k = 3]$ est réalisé, c'est que la variable X_k prend la valeur 3, différente de 1. On procède alors au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage :
  - l'événement $[X_{k+1} = 1]$ est réalisé si et seulement si la variable X_{k+1} prend la valeur 1, c'est-à-dire si on a tiré une boule de numéro différent de 3 lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage (donc de numéro 1 ou 2).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}_{[X_k=3]}([X_{k+1}=1]) = \frac{2}{3}.}$$

- l'événement $[X_{k+1}=2]$ si et seulement si la variable X_{k+1} prend la valeur 2. Il n'est donc jamais réalisé.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}_{[X_k=3]}([X_{k+1}=2]) = 0.}$$

- l'événement $[X_{k+1}=3]$ est réalisé si et seulement si la variable X_{k+1} prend la valeur 3, c'est-à-dire si on a tiré la boule numéro 3 lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}_{[X_k=3]}([X_{k+1}=3]) = \frac{1}{3}.}$$

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- La famille $([X_k=1],[X_k=2],[X_k=3])$ forme un système complet d'événements. Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rllll}
& \mathbb{P}([X_{k+1}=1]) & & & \\
= & \mathbb{P}([X_k=1]\cap[X_{k+1}=1]) & + \ \mathbb{P}([X_k=2]\cap[X_{k+1}=1]) & + \ \mathbb{P}([X_k=3]\cap[X_{k+1}=1]) \\
= & \mathbb{P}([X_k=1])\ \mathbb{P}_{[X_k=1]}([X_{k+1}=1]) & + \ \mathbb{P}([X_k=2])\ \mathbb{P}_{[X_k=2]}([X_{k+1}=1]) & + \ \mathbb{P}([X_k=3])\ \mathbb{P}_{[X_k=3]}([X_{k+1}=1]) \\
= & \frac{1}{3}\times\mathbb{P}([X_k=1]) & + \ \frac{2}{3}\times\mathbb{P}([X_k=2]) & + \ \frac{2}{3}\times\mathbb{P}([X_k=3])
\end{array}$$

La deuxième égalité est obtenue en admettant : $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\mathbb{P}([X_k=i]) \neq 0$.

- De même :

$$\begin{array}{rllll}
& \mathbb{P}([X_{k+1}=2]) & & & \\
= & \mathbb{P}([X_k=1]\cap[X_{k+1}=2]) & + \ \mathbb{P}([X_k=2]\cap[X_{k+1}=2]) & + \ \mathbb{P}([X_k=3]\cap[X_{k+1}=2]) \\
= & \mathbb{P}([X_k=1])\ \mathbb{P}_{[X_k=1]}([X_{k+1}=2]) & + \ \mathbb{P}([X_k=2])\ \mathbb{P}_{[X_k=2]}([X_{k+1}=2]) & + \ \mathbb{P}([X_k=3])\ \mathbb{P}_{[X_k=3]}([X_{k+1}=2]) \\
= & \frac{1}{3}\times\mathbb{P}([X_k=1]) & + \ \frac{1}{3}\times\mathbb{P}([X_k=2]) & + \ 0\times\mathbb{P}([X_k=3])
\end{array}$$

- Et enfin :

$$\begin{array}{rllll}
& \mathbb{P}([X_{k+1}=3]) & & & \\
= & \mathbb{P}([X_k=1]\cap[X_{k+1}=3]) & + \ \mathbb{P}([X_k=2]\cap[X_{k+1}=3]) & + \ \mathbb{P}([X_k=3]\cap[X_{k+1}=3]) \\
= & \mathbb{P}([X_k=1])\ \mathbb{P}_{[X_k=1]}([X_{k+1}=3]) & + \ \mathbb{P}([X_k=2])\ \mathbb{P}_{[X_k=2]}([X_{k+1}=3]) & + \ \mathbb{P}([X_k=3])\ \mathbb{P}_{[X_k=3]}([X_{k+1}=3]) \\
= & \frac{1}{3}\times\mathbb{P}([X_k=1]) & + \ 0\times\mathbb{P}([X_k=2]) & + \ \frac{1}{3}\times\mathbb{P}([X_k=3])
\end{array}$$

- En écrivant ces égalités matriciellement, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_{k+1}=1]) \\ \mathbb{P}([X_{k+1}=2]) \\ \mathbb{P}([X_{k+1}=3]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_k=1]) \\ \mathbb{P}([X_k=2]) \\ \mathbb{P}([X_k=3]) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, en posant } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ on obtient : } \forall k \in \mathbb{N}^*, U_{k+1} = A\ U_k..}$$

c.

- Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_k$ où $\mathcal{P}_k : U_k = A^k U_0$.
  - **Initialisation** :

- D'une part : $U_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_1 = 1]) \\ \mathbb{P}([X_1 = 2]) \\ \mathbb{P}([X_1 = 3]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, d'après la question **1.**
- D'autre part : $A^1\, U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
- D'où $\mathcal{P}_1$.
- **Hérédite** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}_k$ et démontrons $\mathcal{P}_{k+1}$ (i.e $U_{k+1} = A^{k+1}\, U_0$).
  $$\begin{aligned} U_{k+1} &= A\; U_k \\ &= A \times A^k\; U_0 \\ &= A^{k+1}\; U_0 \end{aligned}$$
  D'où $\mathcal{P}_{k+1}$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $U_k = A^k\; U_0$.

- De plus : $A^0\; U_0 = I_3\; U_0 = U_0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in \mathbb{N},\ U_k = A^k\; U_0.}$$

d.

- Tout d'abord :
$$M + \frac{1}{3}\; I = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A$$
- Les matrices $\dfrac{1}{3} \cdot I$ et M commutent, car la matrice identité commute avec toutes les matrices du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.
- Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A^k &= \left(M + \frac{1}{3}\; I\right)^k \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3} I\right)^{k-j} \times M^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} I^{k-j} \times M^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j.}$$

e.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  La première colonne de A^k est obtenue par le produit : $A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus, d'après la question

précédente :

$$A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque Afin de travailler sur la première (resp. deuxième, resp. troisième) colonne de la matrice A^k, on a multiplié à droite par la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Cette technique peut être adaptée à un travail sur les lignes. En multipliant A^k à gauche par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$), on récupère la première (resp. deuxième, resp. troisième) ligne de A^k. Cette technique était déjà présente dans l'épreuve `EDHEC 2017`, `2018`, `EML 2019` ou encore `HEC 2019`. On peut retenir l'idée développée dans le paragraphe par la forme :

$$L \quad A \quad C$$

qui signifie qu'avec une multiplication à gauche, on effectue une opération sur les (L)ignes,tandis qu'avec une multiplication à droite, on effectue une opération sur les (C)olonnes.

- Soit $j \in [\![0, k]\!]$. On a déterminé $M^j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à la première partie.

$$\boxed{M^j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix}.}$$

- On rappelle :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} (A^k)_{1,1} \\ (A^k)_{2,1} \\ (A^k)_{3,1} \end{pmatrix} &= A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
(A^k)_{1,1} &= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \times \left(2 \left(\frac{2}{3}\right)^{j} + 2 \left(-\frac{2}{3}\right)^{j}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} \quad + \quad \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^{j} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{k} \quad + \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{(A^k)_{1,1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}}$$

- De la même manière :

$$(A^k)_{2,1} = (A^k)_{3,1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{k} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^{k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}$$

$$\boxed{(A^k)_{2,1} = (A^k)_{3,1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}}$$

- Enfin, d'après la question **3.c)** :

$$U^k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_k = 1]) \\ \mathbb{P}([X_k = 2]) \\ \mathbb{P}([X_k = 3]) \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k} \end{pmatrix}$$

(multiplier à droite par U_0 permet de sélectionner la première colonne de A^k)

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_k = 2]) = \mathbb{P}([X_k = 3]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}.}$$

f.
- La variable aléatoire X_k est une variable aléatoire discrète finie. Elle admet donc une espérance.
- Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_k) &= 1 \times \mathbb{P}([X_k = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([X_k = 2]) + 3 \times \mathbb{P}([X_k = 3]) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k} + \frac{2}{4} - \frac{2}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k} \\
&= \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_k) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}}$$

g.

```python
def esp(k) :
  return 7/4 - (3/4)*(-1/3)**k

```

Correction 2

On trouve les corrections du 2ème exercice à cette adresse : `https://louismerlin.fr/FTP/EML24cor.pdf`. C'est le concepteur lui-même qui a écrit ce corrigé.

Correction 3

Le troisième exercice est tiré de l'EDHEC 2023 Exercice 3.